برآورد خطا و بهبود میدان تنش به دست آمده از تحلیل مسأله‌ها به روش ایزوژئومتریک*

بهروز حسنی[۱] احمد گنجعلی[۲] سید مهدی توکلی[۳]

چکیده *در این مقاله، به شرح روشی برای بهبود میدان تنش به دست آمده از روش ایزوژئومتریک و برآورد خطای موجود در آن پرداخته می‌شود. این برآورد کننده خطا (Error estimator) در زمره دسته روش‌های برآورد خطای مبتنی بر بازیافت تنش قرار می‌گیرد. در این روش، با استفاده از نقطه‌های فراهمگرا، برای تابع مقدارهای هریک از مؤلفه‌های میدان تنش در هر ناحیه، یک سطح فرضی ساخته می‌شود. برای تعریف این سطح همان تابع‌های شکل نربزی (NURBS' shape functions) به کار می‌روند که با کمک آن‌ها در روش ایزوژئومتریک تابع جابجایی تقریب زده می شود. از مقایسه نُرم خطای کارمایه دقیق و نُرم خطای کارمایه تقریبی، مشاهده می‌شود که برآورد کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی برای برآورد خطای موجود در تحلیل مسأله‌ها به روش ایزوژئومتریک برخوردار است.*

واژه‌های کلیدی برآورد خطا، بازیافت تنش، تحلیل ایزوژئومتریک

Error Estimation and Stress Recovery in the Isogeometrical Analysis Method

B. Hassani A.Ganjali S. M. Tavakkoli

Abstract *In the paper, a new approach is presented for improving the stress field and estimating the solution error based on the isogeometrical analysis method. In this approach, by using the superconvergent points for the components of the stress field in each area, an imaginary surface is generated. The surface is described by the same NURBS' basis functions which are employed for approximating the displacement function in the isogeometrical analysis. The performance of the method is demonstrated by comparison of the exact and approximate energy error norms for a couple of examples that the exact solution is available. It seems that the proposed method can be used as a suitable approach for error estimation in the isogeometrical analysis method.*

Key Words Error Estimation, Stress Recovery, Isogeometric Analysis

---

* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۸/۷/۱ و نسخه‌ی نهایی آن در تاریخ ۹۰/۲/۱۳ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول، دانشیار، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۲) دانشجوی دکترای سازه، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۳) استادیار، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

مقدمه

با پیشرفت شتابان دانش و فن آوری، روش‌های عددی گسترش و گوناگونی چشمگیری یافته‌اند. از جدیدترین این روش‌ها، می‌توان روش ایزوژئومتریک را نام برد. در روش تحلیل ایزوژئومتریک، ویژگی‌های بی‌مانند و مناسبی نهفته است که شاید در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روش‌های عددی معمول نظیر اجزای محدود و روش‌های بدون شبکه (Mesh-free method) شود. وجود برخی کاستی‌ها در روش اجزای محدود، مانند وجود خطا در تعریف مرزهای مسأله‌های با هندسه پیچیده و یا مسأله‌های با تغییرات شدید در بارگذاری و ویژگی‌های مصالح و نیز نیاز به تولید چندباره شبکه اجزا در برخی مسأله‌ها، همانند مسأله‌هایی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسأله‌های بهینه‌سازی شکل سازه، از دسته علت‌هایی هستند که به نوآوری این روش انجامید. این روش را برای نخستین بار هیوز و همکارانش در سال ۲۰۰۵ معرفی کردند [1]. روش ایزوژئومتریک از برخی مفاهیم همانند روش اجزای محدود و روش‌های بدون شبکه برخوردار است که می‌تواند برای حل مسأله‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم در زمینه‌های گوناگون علوم و مهندسی، از جمله نظریه کشسانی، به کار رود. در این روش از فن‌های طراحی به کمک رایانه ((CAD (Computer Aided Design)) بهره گرفته شده است. دلیل اینکه روش‌های طراحی به کمک رایانه تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است به اختلاف زمانی، در پیدایش این دو نسبت به یکدیگر بستگی دارد. آغاز پیدایش روش اجزای محدود در سال ۱۹۵۶ میلادی بوده است در حالی که روش‌های طراحی به کمک رایانه بعدها در حدود سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ شکل گرفته‌اند [1].

اندیشه بنیان گذاری روش ایزوژئومتریک بر پایه بی- اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت (Non-Uniform Rational B-splines) (NURBS) می‌باشد. در این روش با کاربرد ویژگی‌های تابع‌های پایه اسپلاین و نربز در تعریف دقیق خم‌ها و سطح‌ها، از آن‌ها برای درونیابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. باید یادآوری شود با آنکه شرح دادن روش ایزوژئومتریک مورد نظر نمی‌باشد، ولی برای آشنایی خواننده با مفهوم‌هایی که در برآورد خطای این روش با آن‌ها روبرو خواهیم شد، در بخش‌های بعدی به بیان بعضی از مفهوم‌های نخستین پرداخته شده است. برای آگاهی بیشتر می‌توان به مرجع‌های [1-7] مراجعه کرد.

خطا، بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به شمار می‌رود و همواره پژوهشگران را در قابلیت اعتماد نتیجه‌ها نگران می‌کند. در حالت کلی، روش‌های برآورد خطا در دو دستهٔ روش‌های بازیافت تنش و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند [8]. در پژوهش حاضر یک روش هندسی وابسته به بازیافت تنش، و همسو با روش ایزوژئومتریک، برای برآورد خطای نتیجه‌ها پیشنهاد شده است که همه مرحله‌های آن در بخش‌های بعدی شرح داده خواهد شد.

بی- اسپلاین و نربز

این بخش در حد نیاز، به معرفی کوتاهی از خم‌ها و سطح‌های بی- اسپلاین و نربز می‌پردازد. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مرجع‌های [9,10] پیشنهاد می‌شود.

نربزها از بی- اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی-اسپلاین ها در یک فضای پارامتری (ناحیه یا Patch) تعریف می‌شوند. این ناحیه‌ها دامنهٔ الگوسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی (Knot Vector) در فضای پارامتری یک‌بعدی از یک دنباله مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود[10].

$$\Xi=\left\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+p+1}\right\}\ ,\ \xi_{i+1}\geq\xi_i\quad i=1,2,\ldots,n+p+1 \qquad (۱)$$

که در آن ξ_i، iامین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n شمار تابع‌های شکل تشکیل‌دهنده بی- اسپلاین به شمار

می‌رود. چندین گونه از بردارهای گره‌ای وجود دارد ولی در این بحث تنها از گونه ویژه‌ای از بردارهای گره‌ای، به نام بردارهای گره‌ای نامتناوب (Nonperiodic knot vector) (یا باز (Open)) بهره گرفته می‌شود. این گونه بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \{\underbrace{a,\ldots,a}_{p+1}, \xi_{p+1},\ldots,\xi_{m-p-1}, \underbrace{b,\ldots,b}_{p+1}\} \qquad (۲)$$

در این صورت، iامین تابع پایه‌ای بی-اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود [10]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۳)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با کمک تعریف‌های بالا، خم بی- اسپلاین از درجه p به صورت زیر پدید می‌آید[10]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) P_i \qquad a \le \xi \le b \qquad (٤)$$

$C(\xi)$ یک خم چند جمله‌ای قطعه ای (Piecewise polynomial curve) است که در آن $\{P_i\}$ نقطه‌های هادی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ تابع‌های پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به صورت رابطه (۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه تابع‌های پایه، $n+1$ شمار نقطه‌های هادی و $m+1$ شمار گره‌ها باشند، آنگاه می‌توان رابطه $m=n+p+1$ را برای آن‌ها نوشت.

با روش مشابهی سطح‌های بی- اسپلاین با رابطه (۵) تعریف می‌شوند[10]:

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \qquad (۵)$$

که در آن:

$$\Xi = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1}, \xi_{p+1},\ldots,\xi_{r-p-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\}\ ; \qquad (٦)$$
$$\mathscr{H} = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1}, \eta_{q+1},\ldots,\eta_{s-q-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\}$$

به گونه‌ای که بردار گره ای Ξ دارای $r+1$ گره و $\mathscr{H}$ دارای $s+1$ گره می‌باشد.

یک خم نربز، از درجه p، به صورت زیر تعریف می‌شود[10]:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i} \qquad a \le \xi \le b \qquad (٧)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقطه‌های هادی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ تابع‌های پایه‌ای بی- اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره‌ای به صورت رابطه(۲) تعریف شده‌اند.

و در پایان، یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p، و در جهت η از درجه q باشد، با رابطه زیر تعریف می‌شود [10]:

$$S(\xi,\eta) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \qquad 0 \le \xi,\eta \le 1 \qquad (٨)$$

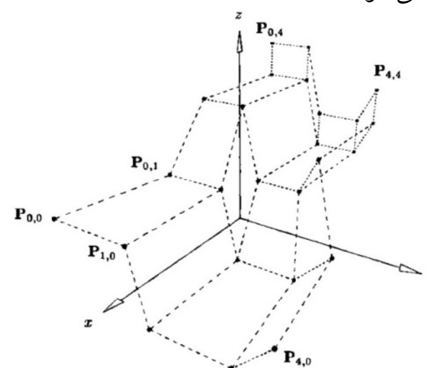
در عبارت بالا $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقطه‌های هادی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ تابع‌های پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای با رابطه (٦) تعریف شده‌اند. در رابطه (٨) اگر تابع‌های پایه‌ای نسبی قطعه‌ای مانند رابطه (٩) تعریف شود:

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \tag{۹}$$

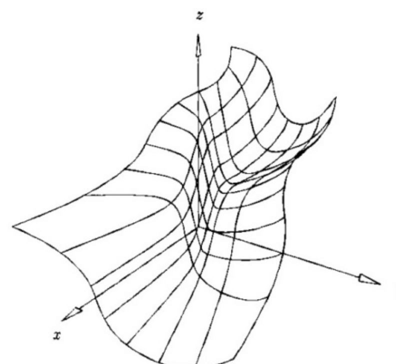
رابطه (۱۰) برقرار است:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)P_{i,j} \tag{۱۰}$$

در شکل (۱) شبکه نقطه‌های هادی و سطح نربز حاصل از آن با تابع‌های پایه درجه دو در جهت x و y مشاهده می‌شود.



الف- شبکه نقطه‌های هادی



ب- سطح نربز

شکل ۱ شبکه نقطه‌های هادی و سطح نربز مربوط به آن با تابع‌های پایه درجه دو [10]

روش‌های برآورد خطا در اجزای محدود

برای آشنایی با برخی از روش‌های برآورد خطای تحلیل‌های عددی در این بخش به معرفی شماری از این روش‌ها در برآورد خطای تحلیل اجزای محدود پرداخته می‌شود.

از نخستین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از برآورد خطا بیان شد، مقاله‌هایی است که ریچاردسون در سال ۱۹۱۰ نوشته است. روش ریچاردسون در برآورد خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود، در حالت‌های معمول به اندازه شبکه‌های به کار رفته بستگی دارد [8]. کار اصلی در برآورد خطا را در سال ۱۹۷۸ بابوشکا (I. Babŭska) و رینبولت (C. Rheinboldt) آغاز کردند. روش آن‌ها که روش باقیمانده‌ای نام گرفت بر این اساس بود که با قراردادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه اجزا، برآوردی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید [8]. دستهٔ دیگر از روش‌های برآورد خطا، روش‌های بازیافت تنش می باشد. به طور کلی بازیافت تنش، روشی برای بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار کردن میدان تنش یا گرادیان میدان حاصل از حل اجزای محدود است. در این روش با بهره جویی از حل روش اجزای محدود، یک پاسخ نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقطه‌ها دلخواه روی دامنه محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیهٔ اجزای محدود داشته است. این میدان تنش بهبود یافته، با این رابطه تعریف می‌شود:

$$\sigma^*=N\bar{\sigma}^* \tag{۱۱}$$

که در آن $\bar{\sigma}^*$ مقدارهای گرهی این میدان و N تابع‌های شکل مورد استفاده در اجزاست. با کاربرد این میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به این صورت محاسبه می‌شود:

$$e^*_\sigma=\sigma^*-\sigma_h \tag{۱۲}$$

که در رابطه (۱۲) σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد [11]. روش‌های گوناگونی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از جمله ابتدایی‌ترین آن‌ها می‌توان به روش میانگین‌گیری که هینتن و کمپبل (Hinton and Campbell) در سال ۱۹۷٤ [12] و روش تصویر L_2 (L₂ Projection Method) که

اودن و براچلی (Oden and Brauchli) در سال ۱۹۷۱ [13] به کار بردند، اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲ روش بازیافت تنش را بر پایه نقطه‌های فراهم گرا SPR (Superconvergent patch recovery) زینکویچ و زو نوآوری کردند و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد [14]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و اثرگذارترین روش‌ها برای برآورد خطا در مسأله‌های مهندسی به کار می‌رود. اساس این روش بر پایه کاربرد نقطه‌هایی به نام نقطه‌های فراهم‌گرا است که در آن‌ها تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقطه‌ها از دقت بیشتری برخوردار می باشد. دراین روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضریب‌های نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه اجزای پیوندخورده به هر گره(Patch)، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. پس از آن نیز فن‌های بسیار دیگری را پژوهشگران نوآوری کردند که در هر یک به نوعی به بهبود روش SPR پرداخته می شود که به عنوان نمونه می توان به روش‌های REP [15] و SPR-C [16] اشاره کرد.

شرح روش بازیافت تنش

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه، به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می‌شود. این سطح فرضی با کاربرد تابع‌ها شکل نربزی که برای گمانه زدن تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده‌اند، به دست می‌آید. یک سطح نربز زمانی به دست خواهد آمد که مختصات نقطه‌های هادی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات x وy هر نقطه هادی با کمک کاربر، تنها مولفه مجهول برای تعیین سطح بهبود یافتهٔ تنش، مولفه z نقطه هادی می‌باشد. روش محاسبه مختصات z نقطه‌های هادی به گونه‌ای است که سطح تنش جدید به دست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریک حاصل شده است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می‌شود.

اساس محاسبه مختصات نقطه‌های هادی و در نتیجه به دست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از ویژگی نقطه‌هایی است که در آن‌ها تنش حاصل از تحلیل تقریبی نسبت به دیگر نقطه‌ها از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقطه‌ها مرتبه همگرایی شیب یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل وابسته به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل این نقطه‌ها را نقطه‌های فراهمگرا می‌نامند که نخستین بار آن‌ها را بارلو مطرح کرد [11].

در تحلیل ایزوژئومتریک دو بعدی که دامنه مسأله با توجه به آرایش نقطه‌های گرهی به اجزای چهار ضلعی تقسیم می‌شود، این نقطه‌های فراهمگرا بر نقطه‌های گوسی جزء قرارمی‌گیرند. مختصات نقطه‌ها هادی سطح بهینه تنش با کمینه کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش به دست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقطه‌های گوس اجزای هر ناحیه با کاربرد روش کمترین مجموع مربعات محاسبه می‌شود.

اگر سطح بازیافتی (بهینه) هریک از مؤلفه‌های بردار تنش با σ^* نشان داده شود، با توجه به تابع‌های شکل نربز می‌توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \qquad (۱۳)$$

که در آن n شمار نقطه‌های هادی در جهت y و m شمار نقطه‌های هادی در جهت x هر ناحیه، R تابع‌های شکل نربز و P مختصات نقطه‌های هادی وابسته به صفحه تنش می‌باشد. اگر **R** و **P** به ترتیب، بردار تابع‌های شکل نربز و بردار مختصات نقطه‌های هادی، به صورت رابطه‌های (١٤) و (١٥) تعریف شود، رابطه (١٣) را می‌توان به صورت (١٦) نوشت.

$$\mathbf{R} = \left[R_{1,1}, R_{1,2}, \ldots, R_{1,n}, R_{2,1}, R_{2,2}, \ldots, R_{2,n}, \ldots, R_{m,n}\right]^T \qquad (١٤)$$

$$\mathbf{P} = \left[P_{1,1}, P_{1,2}, \ldots, P_{1,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \ldots, P_{2,n}, \ldots, P_{m,n}\right]^T \qquad (١٥)$$

$$\sigma^* = R^T P \qquad (١٦)$$

همان گونه که مشاهده می‌شود، تنها عامل مجهول برای تعیین این سطح، مختصات z نقطه‌های هادی (بردار P) می‌باشد. برای تعیین این مقدارها باید مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقطه‌های گوس کمینه کرد. برای این هدف، تابع F(P) به این صورت تعریف می‌شود:

$$F(P) = \sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}(\sigma^*_{i,j} - \overline{\sigma}_{i,j})^2 \qquad (۱۷)$$

که در آن $\overline{\sigma}$ تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و k_x و k_y به ترتیب شمار نقطه‌های گوس در جهت‌های x و y موجود در هر ناحیه می‌باشد. با جایگذاری رابطه (١٦) در (١٧)، رابطه (١٨) حاصل می‌شود:

$$F(P) = \sum_{l=1}^{K}(R_l^T P_l - \overline{\sigma}_l)^2 \qquad (۱۸)$$

که در آن K شمار نقطه‌های گوس موجود در هر ناحیه می‌باشد. در پایان با مشتق‌گیری از تابع F(P) نسبت به مؤلفه‌های z نقطه‌های هادی و برابر صفر قرار دادن آن، مختصات نقطه‌های هادی صفحه تنش بهبود یافته به دست می‌آید.

$$\frac{\partial F(P)}{\partial P_{i,j}} = 0 \quad \Rightarrow \; AP = B \; \Rightarrow \; P = A^{-1}B \qquad (۱۹)$$

که در آن:

$$A = \sum_{i=1}^{K} R_i R_i^T \qquad ; \qquad B = \sum_{i=1}^{K} R_i \overline{\sigma}_i$$

با داشتن مختصات نقطه‌های هادی، سطح تنش وابسته به آن نیز به دست می‌آید. در ادامه، نشان داده می‌شود که این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش حاصل از روش ایزوژئومتریک دقیق‌تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به عنوان یک برآورد کننده توانای خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به کار رود. این برآورد کننده خطا با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر جزء، به صورت تقریبی به معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن جزء دست پیدا کرد.

در ادامه برای بررسی کارایی این برآورد کننده خطا، به مقایسه میانگین خطای کارمایه تقریبی و میانگین خطای کارمایه دقیق برای دو مسأله نمونه بنام در نگره کشسانی که بیشتر برای بررسی کارایی برآوردکننده‌های خطا به کار می‌روند، پرداخته شده است.

میانگین خطای کارمایه

از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا بهره می‌گیرند. یکی از بنام‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای کارمایه است. بنابه تعریف، میانگین خطای کارمایه دقیق تنش برای یک جزء به صورت زیر بیان می‌شود [11]:

$$\| e \| = \left[\int_\Omega (\sigma - \overline{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \overline{\sigma}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۰)$$

در این رابطه **σ** مقدار دقیق بردار تنش، $\overline{\sigma}$ تنش به دست آمده از حل تقریبی، **D** ماتریس کشسانی و Ω دامنه جزء می‌باشد. باید دانست، همیشه حل دقیق مسأله‌های نگره کشسانی در دسترس نیست و تنها برای برخی از موردهای ویژه، پاسخ نظری وجود دارد. بنابراین به جای کاربرد میزان دقیق تنش، میزان بهبود یافته آن برای محاسبه میانگین خطای کارمایه به کار می‌رود. میانگین خطای کارمایه تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| e \| = \| \overline{e} \| = \left[\int_\Omega (\sigma^* - \overline{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \overline{\sigma}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۱)$$

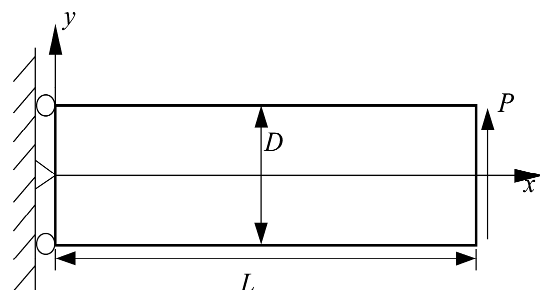
که در اینجا σ^* تنش بازیافتی و $\bar{\sigma}$ تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. در پایان مجموع میانگین خطای کارمایه اجزاء، میانگین خطای کارمایه کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

در ادامه به ارائه نتیجه‌های تحلیل آمده برای سه مسئله نمونه پرداخته می‌شود.

تیر طره تیموشنکو

در این بخش نتیجه‌های الگوسازی یک تیر کشسان خطی همسانگرد در شرایط تنش مستوی با روش ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن ارائه می‌شود (شکل (۲)). عامل‌های به کار رفته در این تحلیل از این قرارند:

$$L = 10 \ , \ D = 2 \ , \ P = 300 \ , \ E = 1500 \ , \ \nu = 0.15$$

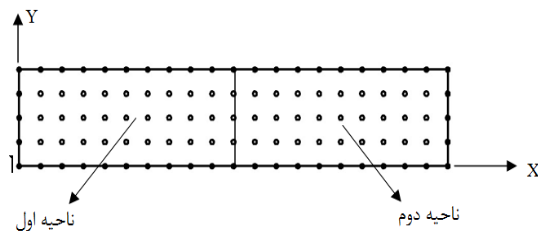


شکل ۲ تیر طره در شرایط تنش مستوی

تنش‌های دقیق این مسأله را با رابطه‌های تحلیلی، تیموشنکو وگودیر به صورت زیر ارائه دادند [17].

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \ ; \ \sigma_y = 0 \ ; \ \sigma_{xy} = \frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \qquad (۲۲)$$

که در آن $I = \frac{D^3}{12}$ می‌باشد. برای الگوسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از ۱۰۵ نقطه هادی و دو ناحیه همانند استفاده شده است (شکل (۳)).



شکل ۳ نقطه‌های هادی مورد استفاده در الگوسازی تیر طره

برای نمایش بهتری از کارایی برآورد کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [18] از تابع‌های شکل نربز مرتبه دو در هر ناحیه به کار برده شده‌اند. بردارهای گرهی در جهت‌های η و ξ به صورت زیر اند.

$$\eta = \{0,0,0.3,0.5,0.7,1,1\} \ , \qquad (۲۳)$$

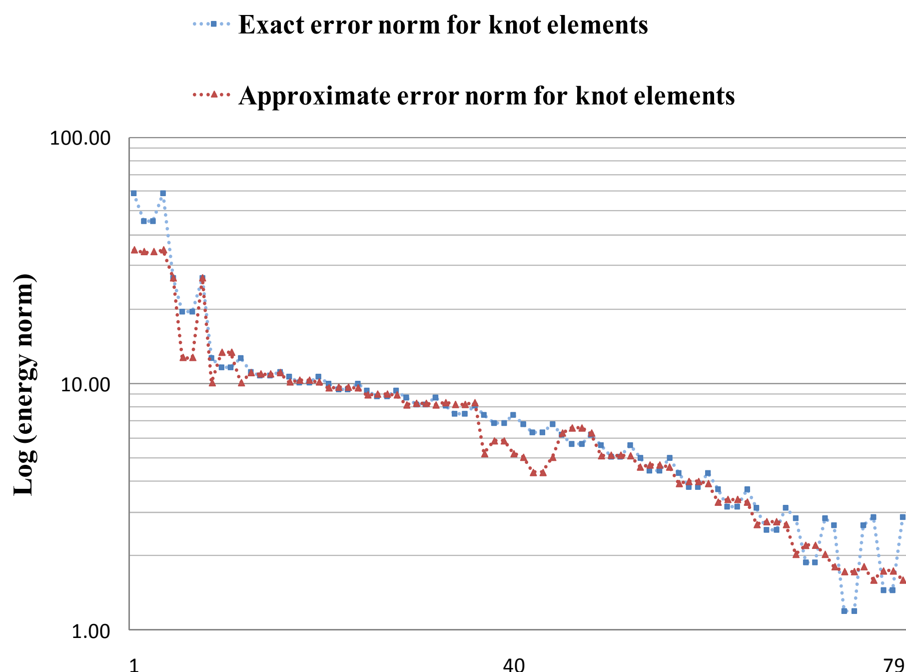
$$\xi = \{0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\}$$

با توجه به مرتبه تابع‌های شکل، در تحلیل ایزوژئومتریک شمار نقطه‌های مورد نیاز برای تابع اولیه گیری عددی به روش گوس از همانند آن در اجزای محدود بیشتر است [19]. از این رو در این نمونه از نه نقطه گوس برای تابع اولیه گیری عددی و نقطه‌های بهینه تنش در هر جزء استفاده شده است.

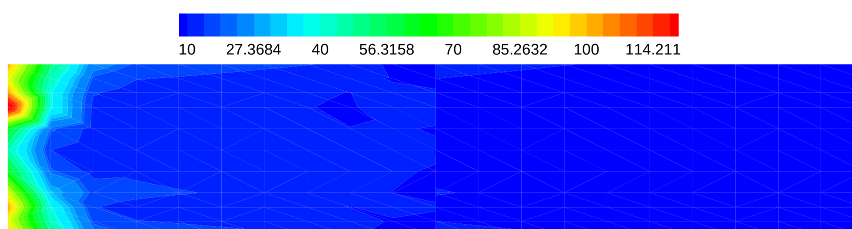
نمودار تغییرات میانگین خطای کارمایه تقریبی و میانگین خطای کارمایه دقیق برای هر جزء در شکل (٤) آمده است. بنابه شکل (٤)، همانندی در چگونگی تغییرات میانگین خطای تقریبی نسبت به میانگین خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی می‌باشد.

همچنین شاخص اثرگذاری برای کل دامنه، ۰/۸٦ محاسبه شده است. شاخص اثرگذاری نسبت مجموع میانگین خطای تقریبی به میانگین خطای دقیق می‌باشد که نشانگر میزان همگرایی پاسخ به سوی پاسخ واقعی است

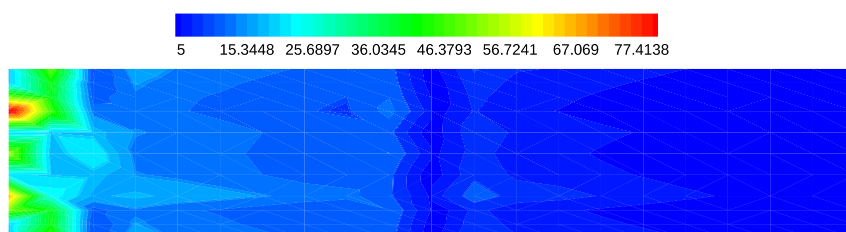
و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا به شمار می‌رود. هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص اثرگذاری به سوی یک گرایش پیدا کند [11]. در شکل (۵) چگونگی توزیع میانگین خطای کارمایه دقیق و میانگین خطای کارمایه تقریبی نشان داده شده است.



شکل ٤ نمودار تغییرات میانگین خطای کارمایه تقریبی و میانگین خطای کارمایه دقیق تیر طره تیموشنکو



الف- میانگین خطای دقیق



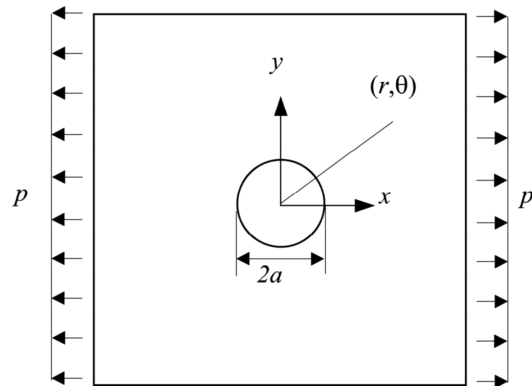
ب- میانگین خطای تقریبی

شکل ۵ توزیع میانگین خطای دقیق و میانگین خطای تقریبی تیر طره تیموشنکو

صفحه نامحدود سوراخدار

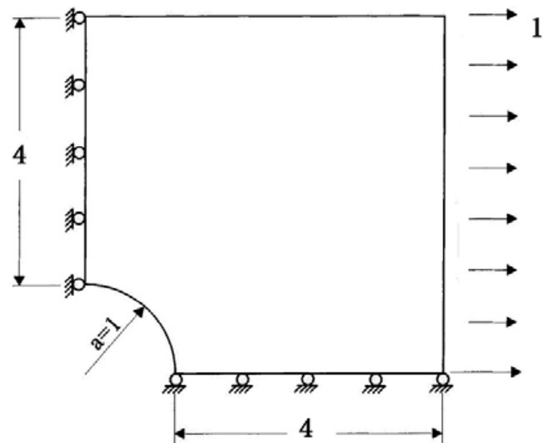
مساله دو بعدی دیگری که برای مقایسه مورد بررسی قرار

گرفته است، مساله صفحه نامحدود سوراخدار می‌باشد (شکل (٦)).



شکل ٦ صفحه نامحدود سوراخدار

به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه، الگوسازی شده است (شکل (٧)).



شکل ٧ ویژگی‌ها و شرایط مرزی دامنه الگوسازی شدهٔ صفحه نامحدود سوراخدار

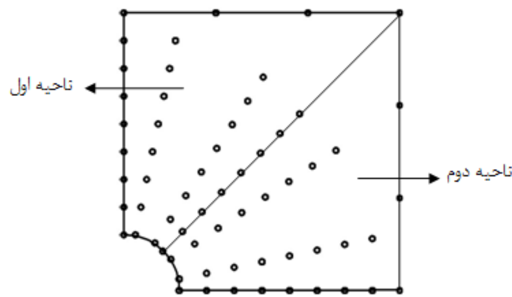
به این صفحه تحت تنش کششی $\sigma_x = 1$ وارد شده و با فرض شرایط تنش مسطح تحلیل شده است. ویژگی‌های مصالح به صورت کشسان خطی همسانگرد با ضریب کشسانی E=1000 و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ در نظر گرفته٤ شده است. تنش‌های دقیق این مسأله با توجه به حل تحلیلی آن در روابط (٢٤) تا (٢٦) آمده‌اند [17].

$$\sigma_x = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4\theta \qquad (٢٤)$$

$$\sigma_y = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta\right) - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4\theta \qquad (٢٥)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\sin 4\theta \qquad (٢٦)$$

برای الگوسازی و تحلیل صفحهٔ نامحدود سوراخدار به روش ایزوژئومتریک از ٦٣ نقطه هادی و دو ناحیه همانند استفاده شده است (شکل (٨)).



شکل ٨ نقطه‌های هادی به کار رفته در الگوسازی صفحه نامحدود سوراخدار

نمونه اول، در این نمونه نیز تابع‌های شکل نربز مرتبه دو در هر ناحیه و نه نقطه گوسی به کار می‌روند. بردارهای گرهی در جهت‌های η و ξ برای هر ناحیه به صورت زیر در نظر گرفته شده اند.

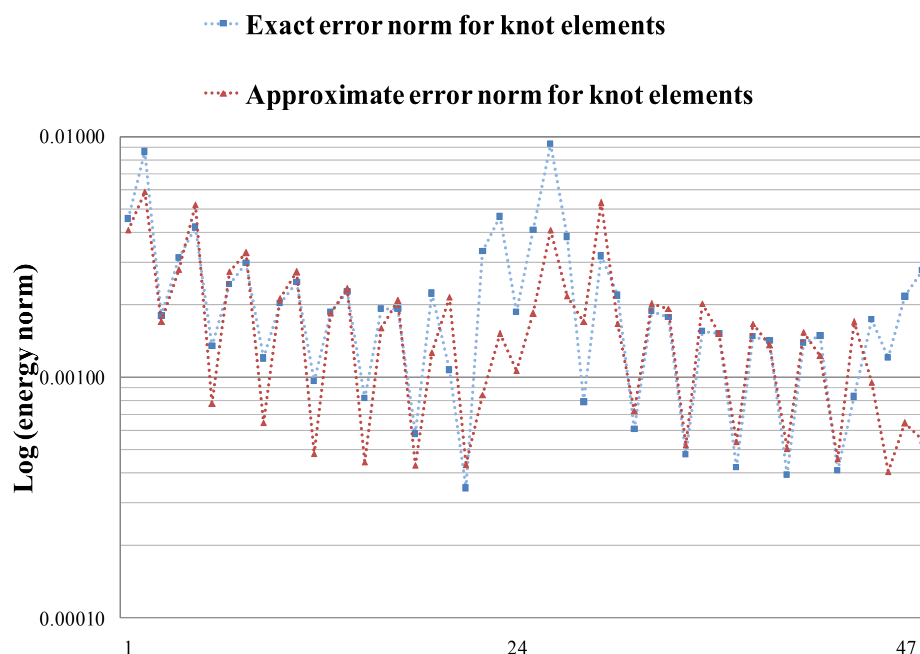
$$\eta = \{0,0,0.3,0.7,1,1\}, \quad \xi = \{0,0,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,1,1\} \qquad (٢٧)$$

نمودار تغییرات میانگین خطای کارمایه تقریبی و میانگین خطای کارمایه دقیق برای هر جزء در شکل (٩) به نمایش درآمده است.

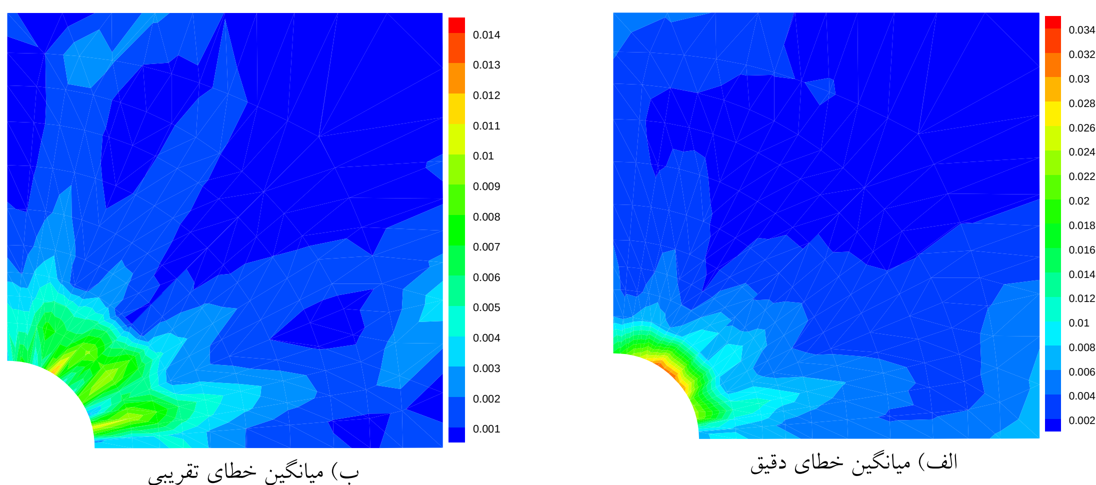
با توجه به عدد ٠/٨١ برای شاخص اثرگذاری میانگین خطای کل دامنه و نیز همسانی تقریبی نمودار تغییرات میانگین خطای کارمایه دقیق و تقریبی در شکل (٩) می‌توان نتیجه گرفت که روش برآورد خطای به کار

گرفته شده برای صفحهٔ نامحدود سوراخدار نیز به نسبت از کارایی خوبی برخوردار می‌باشد.

در شکل (۱۰) بـرای دریافـت بهتـری از تغییـرات میانگین خطای کارمایه و همچنین مقایسه آن بین میانگین خطای تقریبی و دقیق، به رسم توزیـع میـانگین خطـای کارمایه پرداخته شده است.



شکل ۹ نمودار تغییرات میانگین خطای کارمایه تقریبی و میانگین خطای کارمایه دقیق صفحه نامحدود سوراخدار



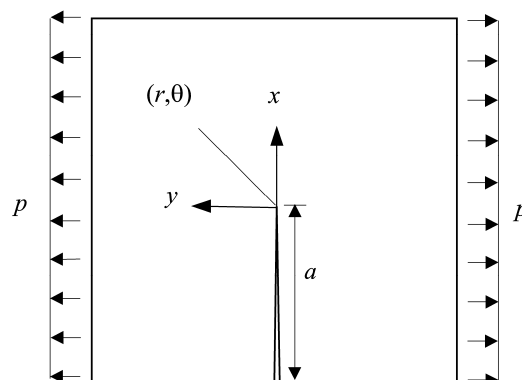
الف) میانگین خطای دقیق
ب) میانگین خطای تقریبی

شکل ۱۰ توزیع میانگین خطای دقیق و تقریبی صفحه نامحدود سوراخدار

در این نمونه رفتار برآورد کننده خطـا، در بـرآورد خطای حاصل از تحلیل مسأله دارای یک نقطـه تکـین بـا روش ایزوژئومتریک بررسی‌می‌شود.

بیشتر مسأله‌های با نقطه تکین، به علت بـالا بـودن

خطای آلودگی، مسأله‌های خوبی برای بررسی کارایی برآورد کننده‌های خطا به شمار نمی‌روند. ولی هدف از این نمونه همان گونه که بحث شد، بررسی رفتار برآورد کننده خطا می‌باشد. نوک ترک به عنوان یک نقطه تکین، نسبت به دیگر نقطه‌ها است، خطای زیادی دارد، بنابراین یک برآورد کنندهٔ خطای مناسب باید به نسبت بتواند این توزیع خطا را نمایش دهد. اگر بهبود شبکه با توجه به نتیجه‌های حاصل از برآورد کنندهٔ خطا مورد نظر باشد، برآورد کنندهٔ خطایی که از آرایشی مناسب برخوردار است، می‌تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در نزدیکی نوک ترک راهنمایی کند. در شکل (۱۱) ویژگی‌های صفحه مربعی با تنش کششی P مشاهده می‌شود. ضلع‌های این مربع به طول 2a و گسترش ترک به میزان a فرض شده است.



شکل ۱۱ صفحه مربعی ترکدار زیر اثر تنش کششی قائم

بازشدگی ترک در مود اول است و در دستگاه مختصات قطبی نشان داده شده در شکل (۱۱) نتیجه‌های تحلیلی آن به صورت زیر می‌باشد [20].

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (۲۸)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (۲۹)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (۳۰)$$

در این رابطه‌ها ضریب شدت تنش K_I با رابطه (۳۱) به دست می‌آید.

$$K_I = P\sqrt{\pi a} \qquad (۳۱)$$

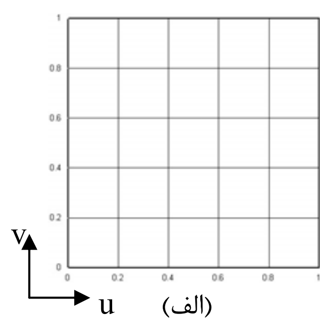
به علت تقارن تنها نیمی از دامنه برای تحلیل الگوسازی می‌شود. عامل‌های به کار رفته در حل مسأله به صورت $P = 10$; $E = 1000$; $\nu = 0.3$; $2a = 10$ = طول ضلع مربع هستند.

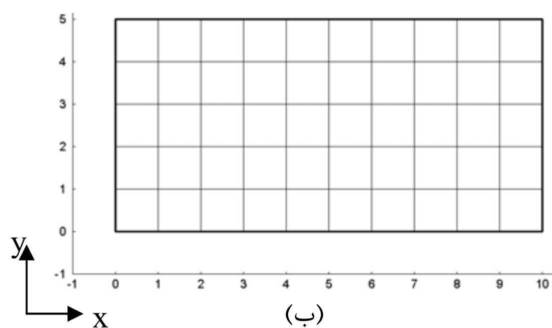
مسأله با روش ایزوژئومتریک برای تابع‌های شکل درجه یک، دو و سه تحلیل شده است.

برای بررسی اثر افزایش درجه تابع‌های شکل در کارایی برآورد کننده خطا، شمار اجزا (بردار گرهی) در هر سه الگو ثابت فرض می‌شود، بنابراین با توجه به رابطه $m=P+n+1$ با افزایش درجه تابع‌های شکل (P) و نظر به اینکه شمار تکرار عضوهای صفر و یک بردار گرهی، P+1 می‌باشد، باید درهر جهت یکی به شمار نقطه‌های هادی (n) افروده شود. شکل (۱۲) بردار گرهی در هر ناحیه و اجزای تولید شده بر روی کل دامنه الگوسازی شده را با تابع‌های شکل درجه یک، دو و سه نشان می‌دهد.

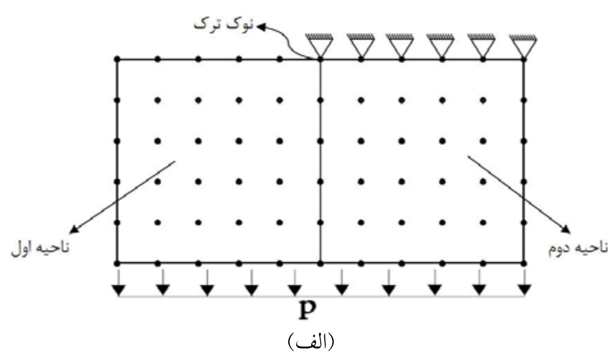
در شکل (۱۳) دامنه الگوسازی شده همراه با شرایط مرزی و نقطه‌های هادی به کار رفته برای تحلیل صفحه ترکدار در کشش با تابع‌های شکل درجه یک، دو و سه نشان داده شده است. بنا به شکل (۱۳) نقطه‌های هادی در نزدیکی نوک ترک که خطای بیشتری نسبت به دیگر نقطه‌ها دارد، افزایش یافته اند.

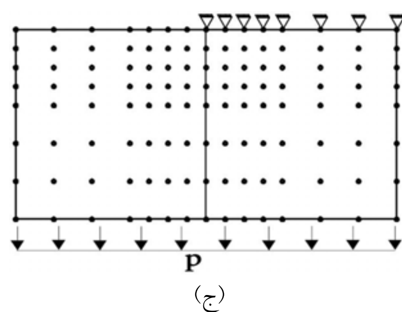
در شکل (۱٤) نتیجه‌های به دست آمده از میانگین خطای کارمایه دقیق و تقریبی برای تحلیل صفحه ترکدار در کشش با تابع‌های شکل درجه یک، دو و سه به نمایش درآمده است.

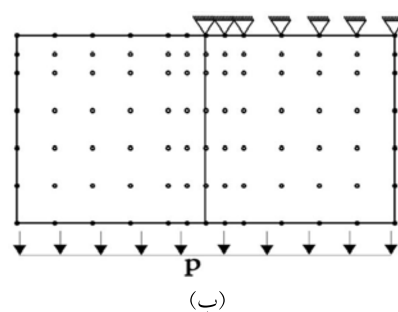




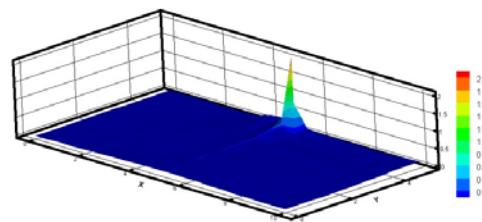
شکل ۱۲ (الف) بردار گرهی و (ب) اجزای تولید شده بر روی دامنه الگوسازی شده با تابع‌های شکل درجه یک، دو و سه به روش ایزوژئومتریک



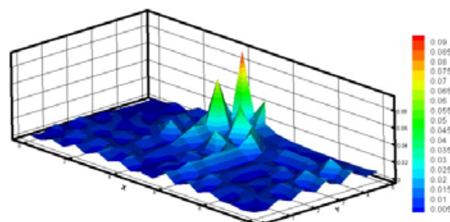




شکل ۱۳ دامنه الگوسازی شده همراه با شرایط مرزی و نقطه‌های هادی به کار رفته برای تحلیل صفحه ترکدار در کشش با تابع‌های شکل (الف) درجه یک، (ب) درجه دو، (ج) درجه سه

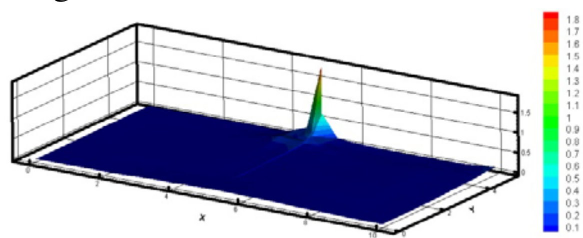


میانگین خطای کارمایه دقیق

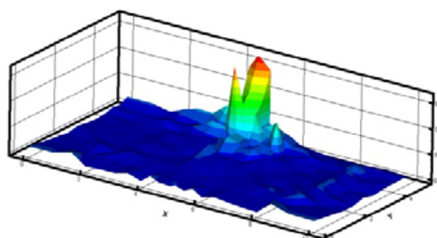


میانگین خطای کارمایه تقریبی

الف) تابع‌های شکل درجه یک

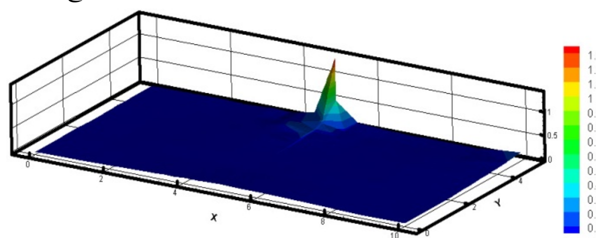


میانگین خطای کارمایه دقیق

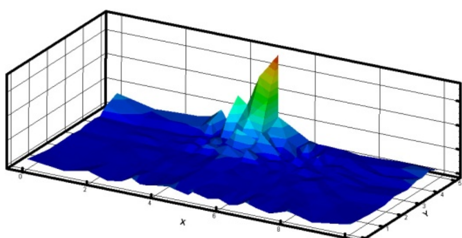


میانگین خطای کارمایه تقریبی

ب) تابع‌های شکل درجه دو



میانگین خطای کارمایه دقیق



میانگین خطای کارمایه تقریبی

ج) تابع‌های شکل درجه سه

شکل ۱٤ مقایسه میانگین خطای کارمایه دقیق و تقریبی صفحه ترکدار در کشش با تابع‌ها شکل درجه یک، دو و سه

با مشاهده میانگین خطای کارمایه تقریبی برای هر سه گونه تابع‌های درجه یک، دو و سه در شکل (۱٤) می‌توان نتیجه گرفت که این برآوردکننده خطا رفتاری مناسب برای برآورد خطای صفحه ترکدار در کشش دارد. به گونه‌ای که در هر سه مورد، میزان خطا در نوک ترک نسبت به دیگر نقطه‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر است. همچنین اگر مقایسه‌ای بین میزان بیشینه میانگین خطای دقیق در شکل (۱٤) صورت پذیرد، مشاهده می‌شود که با افزایش درجه تابع‌های شکل خطای تحلیل ایزوژئومتریک کاهش می‌یابد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله چگونگی به کارگیری روشی برای برآورد خطای موجود در تحلیل مسأله‌ها به روش ایزوژئومتریک شرح داده شد. ویژگی بارز این روش هماهنگی آن با روش ایزوژئومتریک، که یک روش هندسی در تحلیل مسأله‌ها با معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم مانند مسائل کشسانی است، به شمار می‌رود. با توجه به نتیجه‌های تحلیل برای شاخص اثر گذاری و همچنین برابری تقریبی میانگین خطای کارمایه دقیق و تقریبی برای دو مساله نمونه در این مقاله، می‌توان از این روش به عنوان راهکاری ساده و مهندسی برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش به دست آمده از تحلیل مسأله‌ها به روش ایزوژئومتریک بهره گرفت.

مراجع

1. Hughes, T.G.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 194, pp. 4135–4195, (2005).
2. Bazilevs, Y., Beirao Da Veiga, L., Cottrell, J., Hughes, T.J.R. and Sangalli, G., "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", *Math. Mod. Meth. Appl. Sci*., 16, pp. 1031–1090, (2006).
3. Bazilevs, Y., Calo, V., Cottrell, J., Hughes, T., Reali, A. and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 197 (1–4), pp. 173–201, (2007).
4. Bazilevs, Y., Calo, V.M., Zhang, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow", *Comput. Mech.*, 38 (4), pp. 310–322, (2006).
5. Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195 (41–43), pp. 5257–5296, (2006).
6. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA", Wiley, (2009).
7. Hassani, B., Khanzadi, M., Tavakkoli, S.M. and Moghadam, N.Z., "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems", *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization June 1-5*, Lisbon, Portugal, (2009).
8. Zienkiewicz, O.C., "The background of error estimation and adaptivity in finite element computations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*., 195, pp. 207–213, (2006).
9. Rogers, D.F., "*An Introduction to NURBS*", Morgan Kaufmann Publishers, (2001).
10. Piegl, L. and Tiller, W., "*The NURBS Book*", 2nd ed., Springer-Verlag, New York, (1997).
11. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z., "*The Finite Element Method*", 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).
12. Hinton, E. and Campbell, J., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method", *Int. J. Numer. Meth.* Eng., 8, pp. 461-480, (1974).
13. Oden, T.J. and Brauchli, J., "On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation", *Int. J. Numer. Meth.* Eng., 3, pp. 317-325, (1971).
14. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, Part I: The recovery technique", *Int. J. Numer. Meth. Eng*., 33, pp. 1331-1364, (1992).
15. Boroomand, B. and Zienkiewicz, O.C., "Recovery by equilibrium in patchs (REP)", *Int. J. Numer. Meth. Eng*., 40, pp. 137-164, (1997).
16. R´odenas, J.J., Tur, M., Fuenmayor, F.J. and Vercher, A., " Improvement of the superconvergent patch

recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique" *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 70, pp. 705–727, (2007).

17. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "*Theory of Elasticity*", McGraw-Hill, New York, (1977).
18. Dorfel, M.R., Juttler, B. and Simeon, B., "Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*., 199 (5-8), pp. 264-275, (2010).
19. Hughes, T.J.R., Reali, A. and Sangalli, G., "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis" *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199 (5-8), pp. 301-313, (2010).
20. Anderson, T.L. "*Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*", first ed., CRC Press, Boca Raton, (1991).